I. Matematikai logika

Logikai feladatok

1. *a)* igaz; *b)* hamis (pl. 24); *c)* igaz (pl. –1 és$+1$); *d)* igaz; *e)* igaz; *f)* hamis.

2. Csak a B állítás lehet hamis, hiszen ha az igaz volna, akkor valamennyi másik is igaz volna. Így a négyszög rombusz.

3. *a)* Balázs *b)* Csaba

4. Mivel négyen úsztak páratlan számú pályán, ezért nem lehet a három páros helyezést elosztani köztük.

5. Változik, mert a szél sebességcsökkentő hatása hosszabb ideig érvényesül, mint a sebességnövelő hatás.

6. Igaz.

7. Igen. Aki megszólalt, nem lehet lókötő, mert akkor igaz lenne, amit mondott, de tudjuk, hogy mindig hazudik. Tehát ő lovag, és ezért igazat mondott, így társa lókötő.

8. Bizony nagyon álmosak lehettünk, mert ez a két mondat így nem hangozhatott el. Ugyanis az A állítás csak akkor hamis, ha mindketten lovagok, akkor azonban nem mondhatta, hogy legalább az egyikünk lókötő. Ha viszont A igazat mondott, akkor ő lovag, tehát akkor B szükségképpen lókötő. Ebben az esetben viszont igaz, hogy különböző típushoz tartoznak, vagyis ez az állítás igaz, és így is ellentmondásra jutottunk.

9. A harmadik lakos mindenképpen igazmondó. Az első lakos biztos hazudós, ezért a második ha igazat mond, akkor a harmadik lakos is lovag, ha viszont lókötő, akkor is – mivel mindhárman nem lehetnek lókötők – lovag a harmadik.

10. Az öt válaszból pontosan egy lehet igaz, mivel bármely két válasz egymást kizárja. Egy válasznak azonban igaznak kell lennie, mert ha mind hamis, akkor 5 lovag lehetne csak a társaságban, de akkor mindenkinek igazat kellene mondania. Ezért egy lovag volt közöttük.

11. Ha mindenki lókötő lenne, akkor mindenki igazat mondana, ezért kell lennie legalább egy lovagnak. Válasszunk ki egy lovagot. Önmagán és két szomszédján kívül mindenki lókötő, tehát legfeljebb 3 lovag lehet. Ha 3 lenne, akkor ez a három szomszédos lenne. A szélsők nem szomszédok, mégsem lókötők, tehát ellentmondásba ütköztünk, így legfeljebb 2 lovag lehet. Ha csak egy lenne, akkor a szomszédja lókötő lenne, mégis igaz lenne állítása, így egy lovag nem lehet. Tehát csak 2 lovag lehet. Ekkor a két lovagnak igaz az állítása, a lókötőknek pedig mindig van velük nem szomszédos lovag, így az ők állítása hamis. Tehát 2 lovag ül az asztalnál.

12. Mivel az utolsó állítás biztosan igaz, így van közöttük lovag. Ha pontosan k lovag van, akkor igaz a k-adik, $k+1$-edik, … utolsó állítás, az első $k-1$ pedig hamis. Ezért 4 lovag és 3 lókötő van a szobában.

13. Fogalmunk sincs. Ugyanis ha pontosan k igazmondó van köztük, akkor az első k válasz igaz, az azután következő válaszok hamisak, és ez lehetséges is minden k-ra $0 < k \leq 7$ esetén.
14. Ebben az esetben a válaszok kizárják egymást, most csak az első lehet igaz, vagy az sem, így a szobában 0 vagy 1 lovag van.
15. Ha a február nincs a hónapok között, akkor három egymást követő hónapban 91 (szeptember–október–november) vagy 92 nap (pl. június–július–augusztus) van. 91 nap viszont pontosan 13 hét, amelyben 13 vasárnapnak kell lennie, és ez ellentmond a feladat feltételeinek. Ha a három hónap február, március és április, akkor ebben a három hónapban még szökőévben is csak 90 nap van, tehát ha február 1. hétfő, akkor lehet, hogy mindhárom hónapban csak 4 vasárnap volt.
16. Az A és az E állítás egyszerre igaz vagy hamis, hiszen ugyanazt állítja. Ha tehát mindkét állítás hamis akkor a kép az ezüstládában van. Ekkor azonban a harmadik állítás is hamis, ami a feltételek szerint nem lehet. Ha mindkét állítás igaz, akkor a harmadik hamis, tehát a kép az aranyládában van, azt kell választani.
17. A páros számot és a magánhangzót ábrázoló kártyákat, tehát az elsőt és a harmadikat.
18. Ha mindenki páros számú levelet küldött, akkor nem érkezhetett összesen páratlan sok, $19 \cdot 3 = 57$ levél összesen a címzettekhez.
19. *a)* Minden héten van olyan lottószelvényem, amin nincs találat.
b) Van olyan asszony, aki életének minden pillanatában csak olyat akar tenni, amit szabad.
c) Van olyan év, hogy minden tantárgyból van olyan óra, amire nem készültem fel.
20. Marcsa: 5, Ancsa: 4, Julcsa: 3, Borcsa: 2.
21. Könnyen látható, hogy jó megoldás, ha A és B bűnös és C ártatlan. Logikailag azonban megoldás az is, hogy mindhárman ártatlanok.
22. Az első feltétel szerint Edit tanul olaszul, Márti nem lakik Budán, tehát nem tanul németül, ezért csak spanyolul tanulhat. Tehát Zsófi tanul németül, és így ő lakik Budán. A budakeszi lány nem tanul spanyolul, ezért Edit lakik Budakeszin és Márti Pesten.
23. Mindkét kérdés azokra vonatkozik, aki futnak is és teniszeznek is. Ez a két halmaz metszete. Az *a)* kérdésben a metszethalmaz legjobb futója nem feltétlen azonos a metszethalmaz legjobb teniszezőjével, míg a *b)* kérdés mindkét fele a metszethalmaz legfiatalabbjára vonatkozik, tehát ott azonos személyre.
24. Nem. Legyen pl. az A halmaz a páros, a B halmaz a páratlan számok halmaza. Világos, hogy minden páros számhoz van olyan páratlan, amely nála nagyobb, de nincs olyan páratlan szám, amely minden páros számnál nagyobb.
25.

a) $A \Rightarrow B$;	téglalap $\Rightarrow$ az átlók felezik egymást	igaz;
b) $\neg A \Rightarrow \neg B$;	nem téglalap $\Rightarrow$ az átlók nem feleznek	hamis;
c) $C \Rightarrow A$;	átlók $\perp$-ek $\Rightarrow$ téglalap	hamis;
d) $(C \wedge A) \Rightarrow B$;	átlók $\perp$-ek és téglalap $\Rightarrow$ az átlók felezik egymást	igaz;
e) $B \wedge C \Rightarrow E$;	az átlók felezik egymást és az átlók $\perp$-ek $\Rightarrow$ négyzet	hamis;

f) $E \Rightarrow A \vee D$;	négyzet ⇒ téglalap vagy rombusz	igaz;
g) $B \Rightarrow C$;	az átlók felezik egymást ⇒ az átlók ⊥-ek	hamis;
h) $\neg A \Rightarrow \neg C$;	nem téglalap ⇒ az átlók nem ⊥-ek	hamis;
i) $(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg E$;	téglalap és az átlók nem ⊥-ek ⇒ nem négyzet	igaz;
j) $D \vee E \Rightarrow B$;	négyzet és rombusz ⇒ az átlók felezik egymást	igaz.

26. *a)* $A \rightarrow C$; ha a szám osztható 6-tal ⇒ 12-re végződik;
b) $B \rightarrow D$; ha nem páros szám ⇒ prím;
c) $(B \wedge D) \rightarrow F$; páros szám és prím ⇒ nem osztható 9-cel;
d) $(B \vee A) \rightarrow (A \wedge G)$; ha páros vagy 6-tal osztható ⇒ páros és a számjegyeinek összege 3-mal osztható;
e) $E \rightarrow C$; ha 4-gyel nem osztható egy szám ⇒ nem végződik 12-re;
f) $(G \vee B) \leftrightarrow A$; egy szám akkor és csak akkor nem osztható 6-tal, ha számjegyeinek összege nem osztható 3-mal vagy nem páros;
g) $(E \wedge B) \rightarrow D$. ha egy szám osztható 4-gyel és páros ⇒ nem prím.

A *c, e, f, g* igaz, az *a, b, d* hamis.

27. Nem. Akkor is vihetek ernyőt, ha nem is esik.

28. *p: a szám páratlan, q: a szám prím.*

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$
i	*i*	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*

A következtetés hamis.

29. Igen. Lehet az is, hogy betegség miatt hiányzott. Persze lehet az állítása hamis is.

30. *p: a számnak két osztója van, q: a szám prím.*
A következtetés logikai alakja: $[(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge q] \Rightarrow p$. Értéktáblázattal ellenőrizhető, hogy a következtetés helyes.

31. Négy.

32. *a)* Egy. Ez következik a három implikációból.
b) Béla biztosan nem mondott igazat az első implikáció és a saját állítása miatt.
c) Pontosan egy. Ez lehet Antal vagy Csaba egyaránt.

33. A válasz: 29.
Az ellenség a sarkokban állókat kétszer számolja.

```
5 és 5 és 5    6 és 4 és 5    8 és 0 és 7
5         5    4         5    0         0
5 és 5 és 5    5 és 5 és 5    7 és 0 és 8
```

Amikor az erősítés megérkezik, az ellenség éppen támadni készül, így már csak 29 élő védő volt az erődben.

I

34. Először is az A és B feladatnak nincs előfeltétele, így egyszerre, és összesen 8 perc alatt elvégezhetők. Ha B befejeződött, C elvégezhető (B a C előfeltétele).
Ha C elkészült (4 perc alatt), D is elvégezhető (11 perc alatt), és végül, ha D is elkészült, az étel tálalható (vagyis I elvégezhető). Így a kritikus út:
START – 0 – B – 8 – C – 4 – D – 11 – I – 2 – KÉSZ,
és a vacsora elkészítéséhez szükséges idő $8 + 4 + 11 + 2 = 25$ perc, vagyis a vacsora elkészítését legkésőbb 18:05-kor el kell kezdeni.
Mivel G nincs a kritikus úton, attól, hogy 5 perccel rövidebb ideig tartana, még nem kezdhetnénk a vacsora elkészítését 5 perccel később.

35. Minimum három időpontra van szükség a bizottsági ülések számára.
A Vacsora, Szállás és Öregdiák-album bizottságok egyszerre ülésezhetnek, hasonlóan a Műsor és Díszítés bizottságok is. A Meghívók bizottságnak külön időpont kell. Először válogassuk szét, ki melyik bizottságban tag (így jobban látszik, kik vannak ugyanabban a csoportban):
Anna, Jolán, Anita: *Szállás*
Amália, Angéla: *Vacsora*
Kati: *Meghívók*
Károly, Juli: *Műsor*
Zoli, Aliz: *Öregdiák-album*
Erik: *Öregdiák-album és Műsor*,
Tamás: *Szállás és Műsor*,
Simon, Rita: *Vacsora és Műsor*,
Tódor: *Szállás és Díszítés*,
Mátyás, Róbert: *Öregdiák-album és Díszítés*,
Jakab, Gergely: *Meghívók és Díszítés*,
Rozália, Dani: *Meghívók és Vacsora*,
Aki csak egy bizottságban tag, nem számít. Innen látszik, hogy az alábbi bizottságok ülései nem lehetnek egyszerre: *Műsor* és *Öregdiák-album, Műsor és Szállás*, *Műsor* és *Vacsora*, *Meghívók* és *Vacsora*, *Díszítés* és *Meghívók*, *Díszítés* és *Szállás*, *Díszítés* és *Öregdiák-album*.
Látható, hogy a *Műsor* és a *Díszítés*, valamint a *Vacsora*, a *Szállás* és az *Öregdiák-album* bizottságok egyszerre ülésezhetnek, mivel az egy csoporton belüli halmazok metszete üres. A *Meghívók* bizottságnak mindkét csoportbeli halmazzal van közös része, így külön időpont kell az üléseiknek.

36. *Az első feltétel szerint*:
A talajszennyező vagy Tamás, vagy Hugó. A zajszennyező vagy Tamás, vagy Hugó.
A második feltétel szerint:
A levegőszennyező (vagy András, vagy Róbert) teniszezik. Tamás hokizik. A zajszennyező (vagy Tamás, vagy Hugó) focizik. A talajszennyező (vagy Tamás, vagy Hugó) hokizik. Innen Tamás a talajszennyező és Hugó a zajszennyező.
A harmadik feltétel szerint:
András és Tamás nős. Róbert és Hugó agglegény.

A negyedik feltétel szerint:
András a levegőszennyező, aki teniszezik.
Innen pedig Róbert a vízszennyező.
Összefoglalás:
András, a levegőszennyező kelet-magyarországi, teniszezik és nős.
Róbert, a vízszennyező kelet-magyarországi és agglegény.
Tamás, a talajszennyező kelet-magyarországi, hokizik és nős.
Hugó, a zajszennyező nyugat-magyarországi, focizik és agglegény.

37. A feltételek szerint az I. állítás igaz (a, b); a II. is (d). Mivel T csak vasárnap dolgozhat, így III. hamis. U és X beosztása nincs egymásra hatással, ezért V. nem feltétlen igaz. A IV. állítás is igaz (d, e).

38. A helyes beosztás e. Az a-nál nincs fiókvezető, b-nél kettő van, a c és d esetben W és X ugyanaznap dolgozik.

39. Biztosan igaz: a, c. Biztosan hamis: b, d.

40. A második és harmadik állítás hamis, a többi igaz.

41. Valamennyi azonosság bizonyítása, illetve logikai egyenlet megoldása az azonosságok felhasználásával az alábbiakhoz hasonló módon történik.
h)

p	q	r	$p\wedge i$	$p\wedge h$	$(p\wedge i)\vee(p\wedge h)$	$q\wedge r$	eredmény
i	i	i	i	h	i	i	i
i	i	h	i	h	i	h	h
i	h	i	i	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h	i	h
i	h	h	i	h	i	h	h
h	i	h	h	h	h	h	i
h	h	i	h	h	h	h	i
h	h	h	h	h	h	h	i

42. Például $(p\wedge h)\vee p$.

43.

p	q	$p\to q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$
i	i	i	h	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	h	i

44. Igen, mert a feltételből $q = i$ következik, és ez elég $p\vee q = i$-hez.

45. Nem, mert $(p\to q) = h$ esetén az előtag igaz és az utótag hamis, így $(p\wedge\neg q) = i$.

46. $q\to p = i$.

47.

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg (p \wedge q)$
i	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*

p	q	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg (p \vee q)$
i	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*i*

48. Azonosságok: *b; c; e; g; h.*
49. Helyes következtetési formák: *a; b; c; e; h.*
50. Vizsgáljuk meg, hogy a „számlálók” mikor igazak!

p	q	$p \to q$
i	*i*	*i*
h	*i*	*i*
h	*h*	*i*

Bizonyítási módszerek

Skatulyaelv

51. *a)* Ki kell húzni az összes nem zöldet, és még egy zöldet is, tehát 34-et.
b) 6 fehér és 5 zöld kihúzása után a következő biztosan piros vagy kék. Tehát 12-t.
c) Az összes piros, zöld és fehér kihúzása után lehetünk csak biztosak a kék húzásában, tehát 27-et kell kivenni.
d) Ha véletlenül minden pirosat kihúztunk, még mindig nincs kétféle, de a 16. húzás után már biztosan lesz két különböző színű.
e) Lehet, hogy a kékek maradtak csak benn a végén, és még azok közül is ki kell húzni 4-et, tehát összesen 30-at.
f) Ha a zöldek maradnak a végére, akkor csak az utolsó két zöld maradhat benn, tehát 36-ot kell kivenni.
g) 8 golyót kiválasztva még elképzelhető, hogy minden színből kettő van, a 9. húzás után azonban már biztosan lesz olyan szín, amelyikből 3-at vettünk ki.

52. *a)* Ha 32 darabot ki kellett venni, az azt jelenti, hogy 31 golyót még ki lehet úgy húzni, hogy nincs közöttük mind a négy színből. Tehát az utolsó színből 9 golyó van, a másik háromból összesen 31, de egyikből sem lehet 9-nél kevesebb.

b) A másik három színből is legalább 9 golyó kell legyen, hiszen ha valamelyikből kevesebb lenne (persze akkor más valamiből több), akkor annak az első golyójára várva még többet kellett volna húzni. Ezért ha három színből 9-9-9 golyó van, akkor lehet a negyedikből 13 darab.
A következő eloszlások lehetségesek: (1. szín ⇒ amiből a legtöbb van)

1. szín	2. szín	3. szín	4. szín
13	9	9	9
12	10	9	9
11	11	9	9
11	10	10	9

53. Három pár tiszta zoknira van szükségem, ehhez elég 7 darabot kihozni, hiszen ha 6 darabból nem lehet 3 párat választani, akkor van 2 pár zokni, és egy fekete, egy barna. A hetedik valamelyikkel már párt alkot. (Ha úgy értelmezzük a feladatot, hogy csak a további két napra kell zokni, ma már felöltöztem, akkor a helyes válasz 5 db.)
54. Legalább 37-en, hiszen lehet, hogy minden hónapban 3-an születtek, és akkor 36 tanuló esetén sincs olyan hónap, amelyben 4-en születtek.
55. Három egész szám között biztosan van két azonos paritású, azok összege biztosan páros.
56. Négyzetszám 3-mal osztva nulla vagy 1 maradékot adhat, ezért lesz kettő, amelyek maradéka megegyezik, ezért különbségük 3-mal osztható.
57. Négyzetszám 4-gyel osztva nulla vagy 1 maradékot adhat, ezért lesz kettő, amelyek maradéka megegyezik, ezért különbségük 4-gyel osztható.
58. A 10-nél nagyobb prímek végződése csak 1, 3, 7, 9 lehet, ezért van közöttük két azonos jegyre végződő. Ezek különbsége 10-zel osztható.
59. Négyzetszám végződése csak 0, 1, 4, 5, 6, 9 lehet, ezért van közöttük két azonos jegyre végződő. Ezek különbsége 10-zel osztható.
60. Öt egész szám közül – ha van három, amely ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva –, ezek megfelelnek, vagy nincs, de akkor mindhárom maradéknak szerepelnie kell. Vegyünk három ilyen számot! Ezek összegének maradéka $0 + 1 + 2 = 3$, tehát ezeknek az összege 3-mal osztható.
61. Egy szám akkor osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel. Négyzetszám maradéka 3-mal osztva kétféle lehet, 0 vagy 1; 5-tel osztva pedig 0 vagy 1 vagy 4. Ez összesen $2 \cdot 3 = 6$ lehetőség, tehát 7 szám között van kettő, amely 3-mal és 5-tel osztva is ugyanazt a maradékot adja, ezek különbsége 15-tel osztható.
62. Prímszám 3-mal osztva csak 1 vagy 2 maradékot adhat, ha nem a 3-ról van szó. A *10. feladat* szerint bármely 5 egész közül kiválasztható három, amelyek összege 3-mal osztható, ezért maximum 4 szám adható meg úgy, hogy az összegük is prím legyen. Ennyi meg is adható, hiszen például 7, 11, 13, 23 ilyen prímnégyes.
63. Három hatványainak végződése: 3; 9; 7; 1; 3; … tehát a sorozat – mivel mindig egyformán 3-mal szorozzuk az előző végződést – periodikus.
64. Az utolsó két helyen maximum 50-féle végződés állhat (2 hatványai párosak), ezért az első 51 hatvány között van legalább kettő, amely ugyanarra

I

a két számjegyre végződik. Ettől kezdve a sorozat – mivel mindig egyformán 2-vel szorozzuk az előző végződést – periodikus.

65. Tekintsük a következő 17 számot:

1
11
111
1111
⋮
1111…11 (17 darab 1-es)

Ezek közt vagy van 17-tel osztható, vagy nincs. Az első esetben megtaláltuk a keresett számot, a másodikban pedig a 17 szám maximum 16 féle maradékot adhat 17-tel osztva, így van közöttük legalább kettő, amely ugyanazt a maradékot adja. Vonjuk ki a nagyobból a kisebbet! A különbség olyan szám lesz, amiben valahány egyes után néhány nulla áll. Ezt a számot osztja 17, de ez a szám előáll egy csupa egyesből álló szám és 10-nek egy természetes kitevőjű hatványának szorzataként. Mivel 10 és 17 relatív prímek, $\Rightarrow$ 17 a csupa 1-esből álló számot osztja, tehát ez megfelel.

66. Az első 13 meccsből kell 5-öt eltalálni. Ha három tipposzlopot kitöltünk úgy, hogy az első oszlopba csupa 1-est, a másodikba csupa kettest, a harmadikba csupa x-et írunk, akkor biztosan lesz valamelyik oszlopban legalább 5 találatunk, hiszen 13 meccs közül lesz legalább 5, amelyiknek ugyanaz az eredménye.

67. Ha van az egyenesek között két párhuzamos, azok szöge 0°, így a feladat állítása igaz. Ha nincs, akkor toljuk el valamennyi egyenest a sík egy tetszőleges pontjába! Nem változik két egyenes szöge, ha azokat saját magukkal párhuzamosan eltoljuk. Ekkor a 10 egyenes a síkot 20 közös csúcsú szögtartományra bontja, ahol a szögek összege 360°. Ezen szögek között nem lehet mindegyik 20°, vagy annál több, mivel $20 \cdot 20° = 400° > 360°$.

68. Egy pont két koordinátája közül mindkettő vagy páros, vagy páratlan, ez 4 lehetőség. Ezért 5 pont között biztosan van kettő, amelynél mindkét koordináta paritása megegyezik. Ezek felezőpontja kielégíti a feladatot, mivel azonos paritású számok összege páros, annak a fele tehát egész, és így kell a felezőpont koordinátáit kiszámolni.

69. Térben a három koordináta mindegyike vagy páros, vagy páratlan, ez összesen $2^3 = 8$ lehetőség, ezért 9 pont között lesz kettő, amelynek minden koordinátájának paritása megegyezik. Ez a két pont által meghatározott szakasz felezőpontja rácspont.

70. Egy háromszög súlypontjának koordinátáit megkapjuk, ha a három csúcs megfelelő koordinátáinak számtani közepét vesszük. Egy pont koordinátáit tekintve háromféle maradékot adhat 3-mal osztva, ezért 13 pont között lesz 5 olyan pont, amelynek az első koordinátája ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva. Ezek közül bármely hármat választva az első koordináták összege 3-mal osztható. Nézzük ezek második koordinátáit! Ez öt egész szám, amelyről már bizonyítottuk, hogy van közöttük három, amelynek az összege 3-mal osztható, így ezek által meghatározott háromszög súlypontjának mindkét koordinátája egész, tehát rácspont.

71. A számok között eggyel több páratlan van, mint páros, ezért minden permutációban lesz olyan páratlan szám, amely alatt is páratlan szám áll. Ezek különbsége páros, és ha egy szorzatban van páros tényező, akkor a szorzat páros.

72. Tekintsük a következő számokat!

3
33
333
⋮
3333….3 (n db 3-as).

Ezek közt vagy van 3-mal osztható, és akkor az kielégíti a feladat feltételét, vagy nincs. Akkor viszont ez olyan n darab szám, amely n-nel osztva legfeljebb $n-1$ féle maradékot adhat, tehát van köztük legalább kettő, aminek ugyanaz a maradéka. Ezek különbsége n-nel osztható, és a szám a kívánt alakú.

73. Osszuk a körlapot hat darab 60°-os középponti szögű körcikkre! Lesz olyan közöttük, amelyikbe legalább két találati pont esik. Ez a két pont a kívánt tulajdonságú.

74. Osszuk a szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos vágásokkal 9 darab 5 méter oldalú szabályos háromszögre. Lesz olyan közöttük, amelyikbe legalább két pont esik. Ez a két pont a kívánt tulajdonságú.

75. El lehet helyezni. Tegyünk a négy csúcsba, a négy oldalfelező pontba és a négyzet középpontjába egy-egy pontot, ez az elrendezés jó. 10 pontot már nem lehet elhelyezni, mert ha a négyzetet oldalaival párhuzamos vágásokkal kilenc darab kisebb négyzetre bontjuk, akkor lesz olyan, amelyikbe legalább 2 pont esik. E két pont által meghatározott szakasz hossza maximum $\frac{\sqrt{2}}{3} < 1$.

Indirekt bizonyítások

76. Tegyük fel, hogy nincs. Mivel egy embernek nullától $n-1$-ig terjedhet az ismerőseinek száma, ha a társaság n főből áll, ennek az n számnak mind elő kell fordulnia. De ez lehetetlen, hiszen ha valaki $n-1$ embert ismer, azaz mindenkit, akkor kölcsönös ismeretség esetén nem lehet olyan a tagok közt, akinek egyetlen ismerőse sincs.

77. A bajnokságban tehát $\frac{n(n-1)}{2} = 91$ mérkőzés volt. Tegyük fel, hogy győzelemért 2, döntetlenért 1 és vereségért 0 pont jár. Ha mindenki ugyanannyi döntetlen meccset játszott, mint ahányszor nyert, akkor a pontszáma osztható 3-mal, így a pontszámok összegének is 3-mal oszthatónak kellene lennie, de 91 nem osztható 3-mal.

78. Tegyük fel, hogy racionális, ekkor felírható két egész szám hányadosaként. $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, ahol p, q egészek és $q \neq 0$. Négyzetre emelve és q^2-tel átszorozva azt kapjuk, hogy $5q^2 = p^2$. Vizsgáljuk meg a két oldalon álló szám prímtényezős felbontásában 5 hatványkitevőjét! Mivel négyzetszám prímfelbontásában minden kitevő páros, ezért a jobb oldalon 5 páros kitevőjű hatványa áll, a bal oldalon pedig páratlan. Ez azonban ellentmond a számelmélet alaptételének, tehát $\sqrt{5}$ nem racionális.

79. A bizonyítás az előzőhöz hasonló, itt is vizsgálhatjuk 5 kitevőjét a két oldalon.
80. A bizonyítás az előzőekhez hasonló, itt is vizsgálhatjuk 5 kitevőjét a két oldalon.
81. Itt az indirekt feltevés és a négyzetre emelés után $\sqrt{10}$-ről kell az előzőekhez hasonlóan igazolni, hogy irracionális.
82. Tegyük fel, hogy minden számjegy csak véges sokszor ismétlődik a tizedes törtben. Jelölje k azt a legnagyobb számot, ahányszor egy számjegy előfordul. Az összes számjegyek száma akkor legfeljebb $(10 \cdot k)$, de ez véges, irracionális szám tizedes tört alakja viszont végtelen nem szakaszos tizedes tört. Ez ellentmondás, tehát az eredeti állítás igaz.
83. Ha csak egy számjegy ismétlődne végtelen sokszor, akkor az előzőek szerint egyszer elfogynának, és onnan egy jegy ismétlődne csak, tehát a szám tizedes tört alakja szakaszos, és a szám így racionális lenne.
84. Tegyük fel, hogy nincs, azaz bármely három irracionális szám összege racionális.
Jelölje a négy irracionális számot a, b, c és d. Ez azt jelenti, hogy

$$a+b+c=r_1,$$
$$a+c+d=r_2,$$
$$a+b+d=r_3,$$
$$b+c+d=r_4.$$

Négy racionális szám összege is racionális, tehát $3(a+b+c+d)=$ racionális. Ennek harmada is racionális, tehát a négy irracionális szám összege r_5 racionális szám. Akkor viszont két racionális szám különbségeként $d=r_5-r_1$ is racionális, ami ellentmondás.
85. Tegyük fel, hogy van két ilyen szám, legyenek ezek a és b. Ekkor $a+b$ a legkisebb közös többszörösük, tehát a osztja $(a+b)$-t és b osztja $(a+b)$-t, ezért a osztja b-t és b osztja a-t. Mivel természetes számokról van szó, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $a=b$. Ekkor viszont a legkisebb közös többszörösük $a \cdot 2a = a \Rightarrow a=0$. Tehát csak a 0; 0 eset maradt, ekkor viszont nincs legkisebb pozitív többszörös. Vagyis nincs két ilyen természetes szám.
86. Tegyük fel, hogy lehetséges a feladat állítása. Legyen a legkisebb kitevőjű hatvány a 3^a. Az összes többi hatvány $3^a \cdot 3^b$ alakú, ahol b természetes szám. Így a hatványok összege megegyezik egy szorzattal, melynek egyik tényezője a 3^a, a másik pedig 1000 páratlan szám összege, ami páros. Ha a nem negatív, akkor a szorzat páros szám. Ha a negatív, akkor egy páros számot elosztunk egy páratlan számmal, tehát vagy páros számot, vagy nem egész számot kapunk. Így 3333 nem lehet a hatványok összege.
87. Színezzük ki a lámpákat 3 színnel úgy, hogy minden harmadik lámpa azonos színű legyen. Minden lépésben három különböző színű lámpán változtatunk, ezért egy lépésben csak eggyel változik az egy színhez tartozó égő lámpák száma. Az egyik színhez eredetileg 1 égő lámpa tartozott, végül pedig 5-nek kell lennie, ezért páros sok lépés után fog minden lámpa égni. De a másik két színhez eredetileg 0 égő lámpa tartozott, végül pedig 5-nek kell tartoznia, tehát páratlan sok lépés után fog minden lámpa égni. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem lehet elérni, hogy minden lámpa égjen.

88. Tegyük fel, hogy van olyan pont, amelyik nincs lefedve. Ez a pont valamennyi Thalész-körön kívül van, így ebből a pontból valamennyi oldal hegyesszögben látszik. Ez azonban lehetetlen, mert négy 90°-nál kisebb szög összege nem lehet 360°.

89. Tegyük fel, hogy létezik ilyen háromszög. Toljuk el úgy, hogy az egyik csúcsa az O, origó legyen. A másik két csúcs legyen $P(x, y)$ és $Q(v, z)$. Mivel $OP^2 = x^2 + y^2$ és OP páratlan egész, ezért x és y nem lehet egyszerre sem páros, sem páratlan. Hasonló megfontolást végezhetünk az OQ-ra is, amiből azt kapjuk, hogy v és z közül az egyik páros, a másik páratlan. Vizsgáljuk meg PQ-t: $PQ^2 = (x - v)^2 + (y - z)^2$. Ha x és v páros. akkor $x - v$ és $y - z$ is páros, tehát PQ is páros lenne. Ha x és v különböző paritású, akkor ugyanez igaz az y és z párra is, ekkor $x - v$ és $y - z$ is páratlan, négyzeteik összege páros, tehát PQ most sem lehet páratlan. Feltevésünk ezért nem lehet helyes, beláttuk, hogy nincs ilyen háromszög.

90. *Első bizonyítás:*

Tegyük fel, hogy van szabályos rácsháromszög. Toljuk el úgy, hogy egyik csúcsa az origóba essen! Jelöljük A-val azt az origótól különböző csúcsot, amelyik az origó körüli + 60°-os elforgatás után a háromszög harmadik, B csúcsába kerül. Legyenek A koordinátái $A(a_1; a_2)$. A 60°-os elforgatás miatt $B(b_1; b_2)$ koordinátáira teljesülnie kell a következő összefüggéseknek:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \cdot \cos 60° - a_2 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 \\ b_2 &= a_1 \cdot \sin 60° + a_2 \cdot \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 \end{aligned},$$

és $B(b_1; b_2)$ koordinátái is egészek.

Az első egyenlet átrendezéséből azonban $a_2\sqrt{3} = a_1 - 2b_1$, ahol a jobb oldal racionális. A bal oldalon csak akkor kaphatunk racionális számot, ha $a_2 = 0$. Ebben az esetben a második egyenletből hasonló átalakítás és indoklás után $a_1 = 0$ következne, de ez lehetetlen, mert a háromszög origótól különböző csúcsát jelöltük A-val, így nem lehet mindkét koordinátája nulla.

Szabályos rácshatszög sem létezik, mert ha létezne, annak minden második csúcsát kiválasztva szabályos rácsháromszöghöz jutnánk, amiről az előbb igazoltuk, hogy nincs.

Második bizonyítás:

Számítsuk ki kétféleképpen a háromszög területét! Egyrészt tudjuk, hogy a szabályos háromszög területe az oldal négyzetének $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szöröse. Mivel a háromszög oldalának négyzetét Pitagorasz tételével kiszámítva két egész szám négyzetösszegeként kapjuk, ezért nem nulla egész. Ennek $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szöröse irracionális szám. Másrészt kiszámíthatjuk a területet úgy is, hogy egy rácstéglalap-

I

ba foglaljuk a háromszöget, és a téglalap területéből – ami egészek szorzata – levonjuk a leeső háromszögek területeit, ami csak egész, vagy egész + öttized lehet. Az így számított terület tehát racionális, ami ellentmondás.

91. Tegyük fel, hogy létezik szabályos rácsötszög, csúcsait jelölje $A_1A_2A_3A_4A_5$. legyen ez a legkisebb oldalhosszúságú rácsötszög. Ilyen biztosan van, mert az ötszög oldalhossza egész, és legalább 1. Húzzuk be az átlóit! Ezek az ötszög belsejében egy újabb szabályos ötszöget határoznak meg. Az $A_1A_2A_3$ háromszög és a belső ötszög egyik csúcsa paralelogrammát határoznak meg, és ha a paralelogramma három csúcsa rácspont, akkor a negyedik is az, mivel kiszámításában csak összeadást és kivonást használunk, ami nem vezet ki az egész számok közül. Ezzel ismét olyan ötszöget kaptunk, amelynek minden csúcsa rácspont, és oldala kisebb az előzőnél. Ez ellentmondás, hiszen feltevésünk szerint az volt a legkisebb oldalú szabályos rácsötszög.

92. Tegyük fel, hogy van olyan $n > 6$ szám, amelyhez találunk szabályos rácssokszöget. Legyen egy ilyen legrövidebb oldalú rácssokszög $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Ennek a rácssokszögnek valamennyi A_iA_{i+1} oldalát toljuk el úgy, hogy az A_i csúcs az origóba kerüljön. Ekkor a szakaszok végpontjai újra egy szabályos n oldalú $B_1B_2B_3\ldots B_n$ rácssokszöget alkotnak. A két sokszög oldalainak aránya $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = 2\sin\dfrac{\pi}{n} < 1$, mert $n > 6$. Tehát $A_1A_2A_3\ldots A_n$ nem lehetett a legrövidebb oldalhosszú rács n-szög.

93. Az összesen kiválasztható számpárok száma: $\binom{90}{2} = 45 \cdot 89$, ami páratlan szám. Egy szelvényen 5 számot töltünk ki, ez $\binom{5}{2} = 5 \cdot 2 = 10$ számpár megjelölését jelenti. Több szelvény kitöltésével csak ennek többszöröse érhető el, ami nem lehet páratlan, tehát a válasz nem.

94. Nem. Tegyük fel, hogy sikerült, és jelöljük A-val a közös összeget! Minden élen lévő számot két csúcsnál számolunk hozzá az összeghez, és mivel a kockának 8 csúcsa van, így kétféleképpen összeszámolva az összes élre írt számok összegét, a következő egyenletet kapjuk: $8A = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 156$, ami nem osztható 8-cal.

95. Bizonyítás: indirekt módon. Tegyük fel, hogy n nem prím, akkor vagy $n = 1$, vagy $n = ab$, ahol $a > 1$ és $b > 1$. Az $n = 1$-re a szám nem prím, tehát az állítás erről nem mond semmit. Ha $n = ab$, ahol $a > 1$ és $b > 1$, akkor osszuk az n darab 1-esből álló számot b darab olyan számra, amelyek mindegyike a darab 1-esből áll. Ezt az a darab 1-esből álló számot jelölje k, és tudjuk, hogy $k > 1$. Az eredeti n jegyű szám tehát felírható a következő alakban: $k(1 + 10^a + 10^{2a} + \ldots + 10^{a(b-1)})$, és a második tényező is nagyobb egynél. Így nem lehet prím, mivel két egynél nagyobb természetes szám szorzata. Ellentmondásra jutottunk, ezért az eredeti állítás igaz.

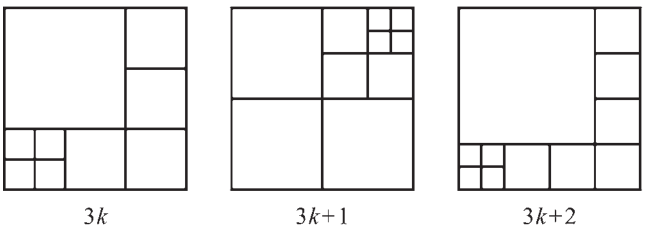
A megfordítás nem igaz, hiszen $n = 3$-ra $111 = 3 \cdot 37$.

I

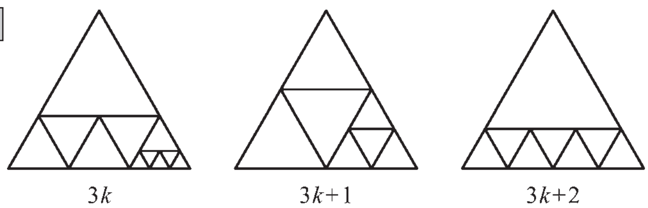
Teljes indukció

96. A hiba ott van, hogy két egymás utáni értékre $n-1$-re és $n-2$-re használtuk a második lépésnél az indukciós feltételt, de csak egyetlen értékre, $n=1$-re ellenőriztük.
97. Az állítás csak 1-nél nagyobb n-ekre igaz, az első lépésnél a jobb oldalon 1-re, a bal oldalon 2-re szóló állítást tettünk egyenlővé.
98. Egy egyenes behúzása esetén legyen az egyik félsík fekete, a másik fehér, ez a színezés jó. Két egyenes esetén már meg kell vizsgálni, hogy az egyenesek párhuzamosak vagy metszők, de mindkét konkrét eset nyilvánvalóan kiszínezhető. Tegyük fel, hogy igaz az állítás $n=k$ egyenesre, azaz a sík a kívánt módon kiszínezhető. Ekkor biztosan létezik egy másik színezés is, az, amelyben fekete az, ami az eredeti színezésen fehér, és fordítva. Húzzuk be most a $k+1$-edik egyenest. Ez a síkot két félsíkra osztja. A két félsík közül az egyikben hagyjuk meg a színezést, a másikban változtassuk az ellentétére. Ez a színezés jó, hiszen mindkét félsík külön-külön jól van színezve, és az egyenes által határolt tartományok az egyenes két oldalán különböző színűek.
99. Elég bebizonyítani, hogy 6; 7; 8 darab négyzetre felbontható (99. ábra), mert azután egy négyzetet 4 egybevágó négyzetre bontva adódik teljes indukcióval minden $3k$; $3k+1$ és $3k+2$ alakú számra, és ezzel az összes természetes számra az állítás.
100. Ez következik a *101*. feladatból. (100–101. ábra)
101. Ha egy háromszög középvonalait meghúzzuk, akkor egyetlen háromszögből négy darab, az eredetihez hasonló háromszöget kaptunk, tehát az eredetihez hasonló háromszögek számát 3-mal növeltük. Ezért elég megmutatni, hogy fel lehet bontani 6; 7; 8 darab, az eredetihez hasonló háromszögre, mert azután egy háromszöget 4 egybevágó háromszögre bontva teljes indukcióval adódik minden $3k$; $3k+1$ és $3k+2$ alakú számra, és ezzel az összes természetes számra az állítás. Ezt a felbontást pedig a 100–101. ábra mutatja.

99.



100–101.



I

A következő feladatokban csak egy-két példát dolgozunk ki részletesen, mivel az összes bizonyítása nagyon hasonló.

102.

a) A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 1$-re az állítás igaz, mert $7^1 + 3^2 = 16 = 4 \cdot 4$.

Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás.

Állítom, hogy $(n+1)$-re is igaz marad, vagyis ha $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$, $\Rightarrow 4 \mid 7^{n+1} + 3^{n+2}$.

Alakítsuk át az állításban szereplő mennyiséget a következő módon:

$7^{n+1} + 3^{n+2} = 7 \cdot 7 + 3 \cdot 3^{n+1} = 7 \cdot 7^n + 7 \cdot 3^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+1} = 7\left(7^n + 3^{n+1}\right) - 4 \cdot 3^{n+1}$.

Ennek az összegnek az első tagja az indukciós feltétel 7-szerese, ezért a feltevés szerint osztható 4-gyel, a második tag egy egész szám 4-szerese, ezért osztható 4-gyel. Mivel az összeg mindkét tagja 4-gyel osztható, így az állítás igaz.

103–106. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

107. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. (Már $n = 0$-ra is igaz az állítás, mert $8 + 3 \cdot 5 = 23$.)

$n = 1$-re az állítás igaz, mert $23 \mid 2^{7+3} + 3^{2+1} \cdot 5^{4+1} = 1024 + 27 \cdot 3125 = 85\,399 =$
$= 23 \cdot 3713$.

Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás.

Állítom, hogy $(n+1)$-re is igaz marad, vagyis ha $23 \mid 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1} \Rightarrow$
$23 \mid 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$.

$$2^{7n+10} + 3^{2n+3} \cdot 5^{4n+5} = 128 \cdot \left(2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}\right) + 9 \cdot 625 \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1} =$$
$$= 128 \cdot \left(2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}\right) + 23 \cdot 239 \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}.$$

Az első tag az indukciós feltétel miatt, a második a 23-mal való szorzás miatt osztható 23-mal, és ezt kellett bizonyítani.

108–109. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

110. Bizonyítandó, hogy $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 1$-re az állítás igaz, mert $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás.

Állítom, hogy $(n+1)$-re is igaz marad, vagyis $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$
$= \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Az indukciós feltétel szerint a bal oldalon az első n tagot a feltétel jobb oldalával helyettesítve

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

és ezt kellett bizonyítani.

I

111–113. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

114. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Erre kétféle bizonyítást adunk.

1. bizonyítás:
Nézzük a teljes indukciós bizonyítást, amely működik akkor is, ha semmi nem jut eszünkbe. Tehát először megnézzük, $n = 1$-re igaz-e az állítás.
$1\cdot 2=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$, tehát igaz. Tegyük fel most, hogy egy n számra igaz az állítás. Állítom, hogy $(n + 1)$-re is igaz marad, vagyis

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \Rightarrow 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+$$
$$+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Az indukciós feltétel szerint a bal oldalon az első n tagot a feltétel jobb oldalával helyettesítve

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=$$
$$=\frac{(n+1)}{3}\left[n(n+2)+3(n+2)\right]=\frac{(n+1)}{3}\left(n^2+5n+6\right)=\frac{(n+1(n+2)(n+3)}{3},$$

amit bizonyítani kellett.

2. bizonyítás:
A jobb oldali kifejezés adhatja az ötletet, mivel nagyon hasonlít $\binom{n+2}{3}$ kifejtett alakjához, annak pontosan a kétszerese. Ezért osszuk el az egyenletet 2-vel! Ekkor a bal oldali tagok is felírhatók binomiális együtthatókként:

$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$, ami ismert kombinatorikai azonosság.

115–118. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

119. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

Erre is kétféle bizonyítást adunk.
1. bizonyítás: Nézzük a teljes indukciós bizonyítást, ami működik akkor is, ha semmi nem jut eszünkbe. Tehát először megnézzük, $n = 1$-re igaz-e az állítás.

I

$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$, tehát igaz. Tegyük fel most, hogy egy n számra igaz az állítás, állítom, hogy $n+1$-re is igaz marad, vagyis $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+$

$+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+$

$+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$. Az indukciós feltétel szerint a bal oldalon az első n tagot a feltétel jobb oldalával helyettesítve $\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$

$=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$, amit bizonyítani kellett.

2. bizonyítás (Parciális törtekre bontás.):
Próbáljuk meg felírni az általános tagot két tört összegeként!

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{x}{2n-1}+\frac{y}{2n+1}=\frac{x(2k+1)+y(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=$$
$$=\frac{2k(x+y)+x-y}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Ez csak úgy teljesülhet minden k-ra, ha $x+y=0$ és $x-y=1$, vagyis $x=\frac{1}{2}$ és $y=-\frac{1}{2}$. Ezt felhasználva a bal oldali összeg a következőképpen írható fel:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

120. A feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

121. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$

Bizonyítás teljes indukcióval. Először nézzük $n=1$-re

$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\ldots+\frac{1}{3+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$, tehát igaz.

Érdemes megnézni $n=2$-re is, hátha észrevesszük, min múlik a bizonyítás.

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}+\ldots+\frac{1}{6+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{459}{420}>1.$$

Tehát az első tag eltűnt, viszont az összeg három új taggal bővült.
Most vizsgáljuk meg, hogy ha n-re igaz az állítás, akkor igaz marad-e $(n+1)$-re is. Ehhez azt elég bizonyítani, hogy $\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}>0$ az előzőek értelmében. Átrendezve $\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{3n+3}=\frac{2}{3n+3}$.
Mivel minden szereplő tag pozitív, ezért 2-vel elosztva az egyenlőtlenséget észrevehetjük, hogy a bal oldal a $(3n+2)$ és $(3n+4)$ kifejezések harmonikus közepének reciproka, míg a jobb oldalon ennek a két kifejezés számtani közepének reciproka áll, ezért az állítás igaz. (Pozitív mennyiségek reciprokaira való áttérésnél fordul az egyenlőtlenség iránya).
Ha azonban nem veszünk észre semmit, az se baj, mert a közös nevezővel végigszorozva és a kijelölt műveleteket elvégezve is kijön az állítás.

122. A **122.** és **123.** közül elég az utóbbit igazolni, mert abból a másik következik. Ez vázlatosan a következő:

123. $n=2$-re:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}.$$

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás.
Állítom, hogy akkor $(n+1)$-re is igaz lesz.
Ehhez azt kell bizonyítani, hogy a kimaradó és az újonnan hozzávett tagok különbsége pozitív. És ez igaz, mert

$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$, mivel két azonos számlálójú pozitív tört közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.

124. Ezt az egyenlőtlenséget is lehet teljes indukcióval igazolni, de sokkal egyszerűbb, ha becsléssel próbálkozunk. Helyettesítsük az egyenlőtlenség minden tagját azaz n darabot az utolsóval, a legkisebbel!

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},\qquad \text{ha}\quad n\geq 2.$$

125–126. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

127. Bizonyítás teljes indukcióval: $n=1$ egyenes a síkot két részre osztja, és a képletből is 2 adódik. Tegyük fel most, hogy tetszőleges n egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja. Állítom, hogy akkor $n+1$ egyenes a síkot legfeljebb $\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$ részre osztja. Nézzük meg, mi történik az $n+1$-edik egyenes behúzásával! A legtöbb rész akkor keletkezik, ha az új egyenes nem megy át semelyik eddigi metszésponton, és nem párhuzamos egyetlen eddigi egyenessel sem. Ekkor tehát az egyenes az előző n egyenes min-

I

degyikét különböző pontokban metszi, azaz n metszéspont keletkezett, és n metszéspont az egyenest $n+1$ részre osztja. Ezek a metszéspontok az $n+1$-edik egyenesen egy-egy új síkrész határoló szakaszai, illetve félegyenesei. Ezért a síkrészek száma $n+1$-gyel nőtt. $\frac{n^2+n+2}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2+2n+2}{2}=$ $=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$, és ezt kellett igazolni.

128. A bizonyítás teljesen az előző mintájára történik. Egy kör a síkot két részre osztja, és ez jön ki a képletből is. Tegyük fel, hogy n kör a síkot legfeljebb n^2-n+2 részre osztja. Ha az $n+1$-edik kör minden előzőt két olyan pontban metsz, amely még nem volt eddig metszéspont, akkor $2n$ metszéspont, és így $2n$ új síkrész keletkezett. És $n^2-n+2+2n=(n+1)^2-(n+1)+2$, amit bizonyítani kellett.

129. *a)* $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cos 2^n x=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}$,

ahol $\sin x\neq 0$ és $n\in\mathbf{N}$.

Bizonyítás teljes indukcióval: $n=1$-re $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$, ahol $\sin x\neq 0\Rightarrow$ igaz.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Bizonyítsuk be most, hogy akkor $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\ldots\cos 2^{n+1}x=\frac{\sin 2^{n+2}x}{2^{n+2}\sin x}$.

Az indukciós feltevést felhasználva $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\ldots\cos 2^{n+1}x=$ $=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}\cdot\cos 2^{n+1}x=\frac{2\sin 2^{n+1}x\cdot\cos 2^{n+1}x}{2^{n+2}\sin x}=\frac{\sin 2^{n+2}x}{2^{n+2}\sin x}$, és ezt kellett bizonyítani.

130.; 131. A **130.** és **131.** feladat hasonlóan bizonyítható a trigonometrikus összegek szorzattá alakítására vonatkozó azonosságok segítségével.

132. Itt meg kell először sejteni a lépésszámra vonatkozó képletet. Ehhez próbáljuk meg először két korongra végiggondolni a lépéseket!

a) A kis korongot a harmadik rúdra tesszük.
b) A nagyot áttesszük a másodikra.
c) Végül a harmadik rúdról rátesszük a kisebb korongot.

Ez tehát 3 lépés.

Most próbáljuk meg három korongra végiggondolni a lépéseket!

a) A kis korongot a második rúdra tesszük.
b) A nagyot áttesszük a harmadikra.
c) A kiskorongot a harmadikra, a közepes tetejére.
d) A legnagyobb korongot a másodikra.
e) A kicsit az elsőre.
f) A közepest a másodikra.
g) A kicsit a második rúd tetejére, és kész.

Ez 7 lépés, de a legfontosabb, hogy látható az eljárás lényege. Tehát n korong esetén

a) először a harmadik rúdra át kell tenni $n-1$ korongot a helyes sorrendben,

b) azután a legnagyobbat a második rúdra,

c) végül rápakolni a harmadik rúdról a másodikra az $n-1$ korongot a helyes sorrendben.

A rekurziós összefüggés tehát – ha a lépésszámot n korong esetén a_n jelöli – $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$.

Most keressünk képletet! Két korongnál 3, három korongnál 7 lépés szükséges. Próbálkozzunk az $a_n = 2^n - 1$ összefüggéssel, ami $n = 1$; 2-re jó. Bizonyítsuk indukcióval, hogy ha n-re igaz volt a képlet, akkor $n+1$-re is igaz marad. Valóban, a rekurziót és az indukciós feltevést felhasználva $a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2\cdot\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 1$, amit állítottunk.

Invariáns tulajdonságok

133. Nem. Ha egy papírdarabot 10 részre bontunk, akkor a részek száma 9-cel nő, tehát nem változik a 9-cel való osztási maradéka a lapok számának. Mivel egy papírból indultunk ki, a kilences maradék tehát 1, így a végén nem lehet a kilences maradék 2, ami 2000 kilences maradéka.

134. Nem. Ha egy papírdarabot 6 részre bontunk, akkor a részek száma 5-tel nő, ha 11 részre bontunk, akkor a részek száma 10-zel nő, tehát nem változik a lapok számának az 5-tel való osztási maradéka. Mivel egy papírból indultunk ki, nem kaphatunk 2000 darabot a végén.

135. Mivel minden lépésben eggyel csökken a táblán lévő számok száma, így a kilencedik lépés után valóban egyetlen szám áll a táblán.

Ha azonos paritású számokat töröltünk le, akkor páros szám került a táblára, ha különböző paritásúakat töröltünk, akkor páratlan szám. Ezek szerint a táblán maradó számok összege mindig páros számmal változik. Mivel a kiinduló összeg $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, ami páratlan, ezért nem maradhat a végén nulla a táblán.

136. Ha egy csúcsból k darab gyufát veszünk el, akkor a másik kettőbe összesen $4k$ gyufát helyezünk, tehát a gyufák száma $3k$-val nőtt. Ezek szerint nem változik a háromszög csúcsaiban lévő gyufaszálak 3-mal való osztási maradéka. Mivel ez az induláskor 1 volt, nem lehet a végén minden csúcsban ugyanannyi, mert annak az összegnek nulla a hármas maradéka.

137. Számozzuk meg a fákat 1-től 14-ig! Ezután vegyük a számok 14-es maradékát, és ez legyen a mókusok száma. (Tehát a 13-as fán ülő mókus szomszédai a 12-es és a 0-s mókusok; az egyes szomszédai a nullás és a 2-es … stb.) Tekintsük a mókusok sorszámának az összegét, és annak 14-es maradékát! Ez tehát 7, mert $\frac{14\cdot 13}{2} = 91 = 6\cdot 14 + 7$. Amikor egy mókus átugrik egy másik fára, legyen a száma az új fa sorszáma.

I

a) Ha az egyik mókus az óramutató járásával megegyező, a másik ellentétes irányban ugrik, az összeg nem változik, mert egyikük száma eggyel nő, a másikuké eggyel csökken. Tehát nem lehet, hogy mondjuk a k-adik fán összegyűljenek, mert akkor a a sorszámok összege $14k$, aminek 14-es maradéka nulla, szemben az induló 7-es maradékkal.

b) Ha tetszőleges irányban, de szomszédos fára ugranak, akkor a sorszámok összege nullával, +2-vel vagy –2-vel változik, azaz páros számmal, és így sem kaphatunk nullát, mivel 7-ből indultunk ki.

A válasz tehát mindkét esetben nem.

138. Itt azt kell észrevenni, hogy egy új parcella elgyomosodásával a gyomos parcellák összkerülete nem változik, mert a két „belső” él helyett a két „külső” élt vesszük számításba. A 10×10-es tábla kerülete 40 mező, a kiindulási 9 gyomos parcella kerülete csak 36 mező, ezért a válasz nem.

Ha 10 gyomos parcella van, akkor elképzelhető, hogy elgyomosodik a terület, például ha a főátló mezői gyomosak. Erre a válasz tehát igen. (Természetesen az is lehet, hogy egyetlen új gyomos parcella sem lesz, pl. ha csak az első sor gyomos.)

139. Vizsgáljuk meg az $x^2 - 10x + 20$ polinom és az $x^2 - 20x + 10$ polinom helyettesítési értékét az $x = 1$ helyen! Az első polinom helyettesítési értéke +11; a másodiké –9. Ha egy lépésben csak az egyik együtthatót változtatjuk eggyel, akkor a polinom értéke is eggyel változik. (Egy polinom helyettesítési értéke az $x = 1$ helyen a polinom együtthatóinak összegével egyenlő.) Bármilyen lépéssorozat után jutottunk is +11-től –9-ig, egyszer kellett, hogy nullán álljunk, akkor pedig a polinom egyik gyöke $x = 1$ volt.

Szitaformula

140. Mivel összesen 90 darab kétjegyű szám van, ezekből kell kivonni azokat, amelyek oszthatók 2-vel (45 ilyen van, mert minden második páros), és azokat, amelyek oszthatók 3-mal (30 ilyen van, mert minden harmadik ilyen). Ekkor azonban kétszer vontuk le azokat, amelyek 2-vel is és 3-mal is oszthatók, ezeket tehát (-1)-szer számoltuk, ezért egyszer még hozzá kell adni, ha azt akarjuk, hogy nullaszor szerepeljenek. A keresett kétjegyű számok száma tehát: $90 - (45 + 30) + 15 = 30$ darab.

141. Az előző gondolatmenethez hasonlóan oldjuk meg a feladatot. Összesen 900 darab háromjegyű szám van. Ezek között 450 darab osztható 2-vel ; 300 darab osztható 3-mal és 180 darab 5-tel osztható van. Azokat a számokat, amelyek oszthatóak 2-vel és 3-mal (azaz 6-tal $\Rightarrow$ 150 van belőle), vagy 2-vel és 5-tel (azaz 10-zel $\Rightarrow$ 90 ilyen van), vagy 3-mal és 5-tel (azaz 15-tel $\Rightarrow$ 60 ilyen szám van köztük), megint kétszer számoltuk le, ezért egyszer vissza kell adni. Nézzük most meg, mi történt 30-cal osztható számokkal, tehát azokkal, amelyek oszthatóak 2-vel és 3-mal és 5-tel is. Ezeket az első menetben 3-szor vontuk le, majd a második fordulóban minden lépésben (háromszor) visszaadtuk, tehát most egyszer szerepelnek a jó számok között, azaz most újra egyszer le kell vonnunk azokat. 30 darab 30-cal osztható szám van. Így az eredmény:
$900 - (450 + 300 + 180) + (150 + 90 + 60) - 30 = 240$ szám.

142. 999 darab legfeljebb háromjegyű szám van. Ezek közül 33 olyan van, ami 30-cal osztható, 28 olyan, ami 35-tel, és 23 olyan, amelyik 42-vel osztható. Ezek között azonban a 210-zel, azaz az 5-tel, 6-tal és 7-tel is osztható számokat háromszor számoltuk le. Négy ilyen legfeljebb háromjegyű szám van, és ezeket egyáltalán nem szabad számolnunk. A keresett számok száma tehát:
$33 + 28 + 23 - 3 \cdot 4 = 72$.

143. Az összes legfeljebb 8 jegyű számok száma: 3^8. Ezek között vannak olyanok, amelyek csak kétféle számjegyet tartalmaznak, pl. csak ötöst és hatost, vagy csak hatost és hetest, esetleg csak ötöst és hetest. Kétféle számjegyből összesen 2^8 szám készíthető. Tehát le kell vonni $3 \cdot 2^8$ számot. Ekkor azonban a csak 5-öst vagy csak 6-ost vagy csak 7-est tartalmazó számokat kétszer vontuk le, ezért egyszer vissza kell adni. A keresett szám tehát: $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 1932$.

144. Az ötös számrendszerben öt számjegy van: 0; 1; 2; 3; 4. Az összes 8-jegyű számok száma 5-ös számrendszerben ezért 5^8. Ezek közül nem felelnek meg azok, amelyek csak 3 számot tartalmaznak az 1-2-3-4 közül, és lehet még benne 0 is. A 4 számból a szereplő 3-at $\binom{4}{3}$-féleképpen tudjuk kiválasztani, és a kiválasztott 3 számból és a 0-ból 4^8 darab szám képezhető. Ekkor azonban azokat a számokat, amelyekben csak kettő szerepel a kiválasztott 3 számból, többször számoltuk. Négy számból 2-t $\binom{4}{2}$-féleképpen tudunk kiválasztani, és a két számból és a 0-ból 3^8 szám képezhető. Most azokat kell még kivonni, amelyek az 1-2-3-4-ből csak egyet tartalmaznak, és még a nullát. Ezek száma $\binom{4}{1} \cdot 2^8$. Még a csupa 0-ból álló számot kell megnézni, hogy hányszor számoltuk le. Ha végigkövetjük, akkor $1 - 4 + 6 - 4 = -1$-szer számoltuk, ezért most még egyszer hozzá kell adni. A keresett számok száma:
$$5^8 - \binom{4}{3}4^8 + \binom{4}{2}3^8 - \binom{4}{1}2^8 + 1 = 166\,824.$$